

平成 28 年度 入学 試験 問題 (前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

# 数 学 ( 前 期 )

[ 1 ]

(1) 変数  $u \geq 1$ ,  $v \geq 1$  が関係式  $u + v = 3$  をみたすとき, 積  $uv$  の値の範囲を示せ。

変数  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  が関係式  $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3$  をみたすとする。  $u = \sqrt{1+x^2}$ ,  $v = \sqrt{1+y^2}$ ,  $t = uv$  とおく。

(2)  $xy$  を  $t$  の関数として表せ。

(3)  $(x+y)^2$  を  $t$  の関数として表せ。

(4)  $x+y$  の値の範囲を示せ。

[ 2 ] 自然数  $a, b$  に対して, その最大公約数を  $G(a, b)$  とする。

(1)  $a > b$  のとき,  $G(a, b) = G(a-b, b)$  を示せ。

自然数  $n$  に対して  $(1+\sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{3}$  ( $p_n, q_n$  は自然数) とおく。

(2)  $G(p_{n+2}, q_{n+2})$  と  $G(p_n, q_n)$  の関係式を導け。

(3)  $G(p_n, q_n)$  の値を求めよ。

[ 3 ]  $e$  を自然対数の底として,  $f(x) = e^x - 2x^2$  とおく。  $2 < e < 2\sqrt{2}$  および  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$  は既知とする。

(1)  $f'(x)$  を  $f(x)$  の導関数とすると, 方程式  $f'(x) = 0$  は 2 つの解を持つことを示せ。

(2) 方程式  $f'(x) = 0$  の 2 つの解を  $a, b$  ( $a < b$ ) とするとき,  $0 < a < 2 < b$  を示せ。

(3) 方程式  $f(x) = 0$  は 3 つの解を持つことを示せ。

[ 4 ] 半径が等しい 2 つの円と一辺の長さ 2 の正三角形 ABC がある。2 つの円は互いに外接している。さらに一方の円は辺 AB と BC に接し, 他方の円は CA と BC に接している。

(1) これらの円の半径を求めよ。

(2) 2 つの円の周および内部を, 三角形 ABC の A を通る中線の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

[ 5 ] 1, 2, 3, 4, 5 と記されたカードがそれぞれ 2 枚ずつ, 合計 10 枚のカードがある。以下のゲームを行い, 当たり, 外れを決める。

10 枚のカードをよく混ぜて, 2 枚引く。引いたカードの 2 数の合計を  $A$  とおく。 $A \geq 7$  のときは外れ,  $A = 6$  のときは当たりとする。 $A \leq 5$  のときは, 残りの 8 枚のカードの中から更に 1 枚を引き, 3 枚のカードの合計を  $B$  とする。 $B \neq 6$  ならば外れ,  $B = 6$  ならば当たりとする。

(1)  $A = 6$  である確率を求めよ。

(2) このゲームで当たりとなる確率を求めよ。